Midtoets Calculus 1

26 september 2011, 9.00-11.00 uur.

Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad je werkcollegegroep en het aantal ingeleverde bladen. Bij deze toets is het gebruik van aantekeningen, boeken, en van een grafische rekenmachine niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

1. (a) Formuleer het principe van volledige inductie.

   (b) Bewijs m.b.v. volledige inductie dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt dat
   $$1\,(1!) + 2\,(2!) + 3\,(3!) + \cdots + n\,(n!) = (n+1)! - 1$$
   NB: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

2. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan
   $$z^2 = \frac{1}{1+i}$$
   en schets de ligging van de oplossingen in het complexe vlak.

3. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan
   $$e^z = 1 - i$$

4. De functie $f(x)$ is gedefinieerd voor $-\infty < x < \infty$. Verder is gegeven dat
   $$\lim_{x \to 0} f(x) = 2.$$
   (a) Geef de ϵ-δ-definitie van $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$.

   (b) Bewijs m.b.v. deze definitie dat er een getal $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $f(x) > 1$ als $|x| < \delta$.

Detailnormering:

1a	1.0	2	2.0	3	2.0	4a	1.0
b	2.0					b	1.0

Totaal: 9 +1 (gratis) = 10.

6,5 pt. 8

1a) Als je wilt bewijzen dat een stelling geldt voor een reeks Natuurlijke getallen n, dan kun je dat doen m.b.v. Volledige inductie. Eerst ga je kijken of de stelling waar is voor de kleinste n door n=1 in te vullen in de stelling. Als de stelling voor n=1 niet klopt dan moet je de stelling verwerpen. Als de stelling wel klopt voor n=1 dan ga je naar de volgende bewijs-stap. Je gaat aannemen dat de stelling klopt voor n en gaat vervolgen kijken of de stelling dan ook geldt voor (n+1). Als dit blijkt te kunnen dan heb je de stelling bewezen voor alle n want je hebt een n-waarde (n=1) die klopt en je weet dat de volgende n ook steeds klopt!

1

b) Te bewijzen $1(1!)+2(2!)+3\cdot(3!)+\ldots+n(n!)=(n+1)!-1$ met $n \geq 1$ en $n \in$

2 $n=1 \Rightarrow 1(1!)=1=(2\cdot 1)-1$ Dit klopt dus voor $n=1$ is de stelling juist

Van n naar n+1 → Als $1(1!)+2(2!)+3(3!)+\ldots+n(n!)=(n+1)!-1$

dan $\underbrace{1(1!)+2(2!)+3\cdot(3!)+\ldots+n(n!)}+(n+1)((n+1)!)=$

$(n+1)!-1 \quad + (n+1)((n+1)!)=$

$((n+1)+1)((n+1)!)-1=$

$(n+2)((n+1)!)-1=$

$(n+2)!-1=$

$((n+1)+1)!-1$ QED 8

2 $z^2 = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2

$z^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$

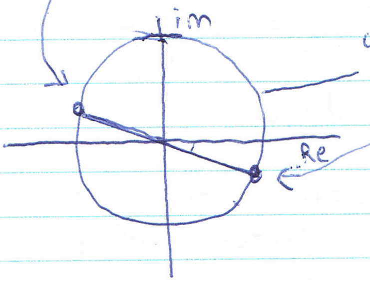
$r^2 = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

$2\alpha = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{8}\pi + k\pi$

2 oplossingen: (voor z) • $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \left(\cos(-\frac{1}{8}\pi) + i \sin(-\frac{1}{8}\pi)\right)$

• $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \left(\cos(\frac{7}{8}\pi) + i \sin(\frac{7}{8}\pi)\right)$

cirkel met straal $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$



3 $e^z = 1 - i = e^{(\frac{z}{i})i} = \cos(\frac{z}{i}) + i \sin(\frac{z}{i})$

0,5 $(r=1)$ $\quad (\frac{z}{i}) = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi$

?

$z = (-\frac{1}{4}\pi + 2k\pi)\, i$

4 a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

1

waarom?

b) $|x| < \delta$

0

neem $\delta = 1 \Rightarrow |x| < 1$ dan moet gelden: $|f(x) - 2| < 1$

dus $f(x)$ moet groter zijn dan 1